

UNIDAD 2

EXPONENTES Y RADICALES

EJERCICIOS RESUELTOS

Objetivo general.

Al terminar esta Unidad resolverás ejercicios y problemas en los que apliques las leyes de los exponentes y de los radicales.

Objetivo 1. Recordarás la notación exponencial, el concepto de base y el de exponente.

Ejercicios resueltos:

a.) Evalúa las expresiones indicadas:

$$\begin{aligned} 1.) \quad & -3^2 + (-2)^4 - 4^3 + (-2)^4 \\ & -3^2 + (-2)^4 - 4^3 + (-2)^4 \\ & = -(3 * 3) + [(-2)(-2)(-2)(-2)] - (4 * 4 * 4) + [(-2)(-2)(-2)(-2)] \\ & = -9 + 16 - 64 + 16 \\ & = -41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad & 8 + 3 \times 5^2 - 7^2 \\ & 8 + 3 \times 5^2 - 7^2 = 8 + 3 \times (5 * 5) - (7 * 7) \\ & = 8 + 3 \times 25 - 49 \\ & = 8 + 75 - 49 \\ & = 34 \end{aligned}$$

$$3.) \quad 10^2 + \sqrt[3]{6^3 - [4(5-2)]^2}$$

$$\begin{aligned}
 10^2 + \{6^3 - [4(5-2)]^2\} &= 10^2 + \{6^3 - [4(3)]^2\} \\
 &= 10^2 + \{6^3 - [12]^2\} \\
 &= 10^2 + \{216 - 144\} \\
 &= 100 + \{72\} \\
 &= 172
 \end{aligned}$$

b.) Calcula x^2 y $-x^2$ para los valores de x que se dan:

4.) $x = -3$

$$x^2 = (-3)(-3) = 9$$

$$-x^2 = -(-3)(-3) = -9$$

5.) $x = \frac{2}{8}$

$$x^2 = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

$$-x^2 = -\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{2}{8}\right) = -\frac{4}{64} = -\frac{1}{16}$$

6.) $x = -7$

$$x^2 = (-7)(-7) = 49$$

$$-x^2 = -(-7)(-7) = -49$$

Objetivo 2. Recordarás la ley para multiplicar factores con la misma base y exponentes enteros.

Ejercicios resueltos:

Escribe con notación exponencial el resultado de las operaciones indicadas:

$$1.) \quad \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^{4+3} = \left(\frac{1}{6}\right)^7$$

$$2.) \quad x^{12} * x^{12} = x^{12+12} = x^{24}$$

$$3.) \quad 5^3 * 5^2 * 5^4 = 5^{3+2+4} = 5^9$$

Objetivo 3. Recordarás el significado de los exponentes negativos y del exponente nulo.

Ejercicios resueltos:

Escribe sin los exponentes negativos o nulos las expresiones que se dan.

$$1.) \quad x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$2.) \quad 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$3.) \quad \frac{4^2}{3^{-2}} = (4^2)(3^2) = 16 \cdot 9 = 144$$

$$4.) \quad \frac{a^3 b^{-2} c^{-4}}{x^{-2} y^{-3} z^5} = \frac{a^3 x^2 y^3}{b^2 c^4 z^5}$$

$$5.) \quad (3a+b)^0 (2a-b)^{-1} = (1)(2a-b)^{-1} = \frac{1}{2a-b}$$

Objetivo 4. Recordarás la ley para dividir factores con la misma base y exponentes enteros.

Ejercicios resueltos:

Escribe con notación exponencial el resultado de las operaciones indicadas:

$$1.) \quad \frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$$

$$2.) \quad \frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

$$3.) \quad (2xy)^6 \div (2xy)^4 = (2xy)^{6-4} = (2xy)^2$$

Objetivo 5. Recordarás la ley para elevar una potencia entera a otra potencia entera.

Ejercicios resueltos:

Escribe con notación exponencial el resultado de las operaciones indicadas:

$$1.) \quad \left[(ab)^3 \right]^2 = (ab)^{3 \cdot 2} = (ab)^6$$

$$2.) \quad (x^{-4})^5 = x^{-4 \cdot 5} = x^{-20}$$

$$3.) \quad (y^3)^{-5} = y^{3(-5)} = y^{-15}$$

Objetivo 6. Recordarás las leyes para elevar un producto o un cociente a una potencia entera.

Ejercicios resueltos:

Escribe con notación exponencial el resultado de las operaciones indicadas:

$$1.) \quad (4xy^2)^3 = 4^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 = 64x^3y^6$$

$$2.) \quad \left(\frac{2a^2b}{x^3} \right)^4 = \frac{(2a^2b)^4}{(x^3)^4} = \frac{2^4 \cdot (a^2)^4 b^4}{(x^3)^4} = \frac{16a^8b^4}{x^{12}}$$

$$3.) \quad (3xy^{-3})^{-2} = \left(\frac{3x}{y^3} \right)^{-2} = \frac{(3x)^{-2}}{(y^3)^{-2}} = \frac{(y^3)^2}{(3x)^2} = \frac{y^6}{3^2 x^2} = \frac{y^6}{9x^2}$$

Objetivo 7. Recordarás la notación de radicales.

Ejercicios resueltos:

Escribe en notación radical las expresiones que se dan en forma exponencial e identifica el radicando y el índice en la expresión obtenida.

$$1.) \quad 5^3 = 125.$$

La expresión correspondiente es $5 = \sqrt[3]{125}$.

El radicando es 125 y el índice es 3.

$$2.) \quad x = y^4.$$

La expresión correspondiente es $\sqrt[4]{x} = y$

El radicando es x y el índice es 4.

$$3.) \quad b^3 = a^4.$$

Hay dos expresiones posibles que son correspondientes: $b = \sqrt[3]{a^4}$ y

$$\sqrt[4]{b^3} = a$$

En $b = \sqrt[3]{a^4}$ el radicando es a^4 y el índice es 3.

En $\sqrt[4]{b^3} = a$ el radicando es b^3 y el índice es 4.

Objetivo 8. Recordarás el significado de los exponentes fraccionarios.

Ejercicios resueltos:

Obtén, con exponentes fraccionarios, el resultado de las expresiones indicadas:

$$1.) \quad (\sqrt[3]{7})^3 = \left(7^{1/2}\right)^3 = 7^{3/2}$$

$$2.) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{22^4}} = \frac{1}{(22^4)^{1/3}} = \frac{1}{22^{4/3}} = 22^{-4/3}$$

$$3.) \quad \sqrt[5]{(a)^3(a)^4} = \sqrt[5]{a^7} = (a^7)^{1/5} = a^{7/5}$$

$$4.) \quad (\sqrt[4]{31^3})^5 = \left([31^3]^{1/4}\right)^5 = (31^{3/4})^5 = 31^{(3/4)(5)} = 31^{15/4}$$

Objetivo 9. Recordarás las leyes para multiplicar y dividir factores con exponentes fraccionarios o con radicales.

Ejercicios resueltos:

Obtén con notación de radicales el resultado de las operaciones indicadas:

$$1.) \quad [(3a)(4b)]^{1/5} = [12ab]^{1/5} = \sqrt[5]{12ab}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{x^5}{x}} = \sqrt{x^{5-1}} = \sqrt{x^4} \\ &= x^{4/2} = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.) \quad \left(\frac{a^2}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} &= (a^{2-3})^{\frac{1}{2}} = (a^{-1})^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.) \quad \left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(x^{\frac{1}{3} - (-\frac{2}{3})}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.) \quad \left(\frac{2^4\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{y}}\right)^3 \left(\frac{y^4}{\sqrt{x^{-1}}}\right) &= \left(\frac{2^4\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{y}}\right)^3 (y^4 \sqrt{x}) \\
 &= \left(\frac{2x^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^3 (y^4 x^{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{2^3 x^{\frac{9}{4}}}{y^{\frac{3}{3}}}\right) (y^4 x^{\frac{1}{2}}) \\
 &= \left(\frac{8x^{\frac{9}{4}}}{y}\right) (y^4 x^{\frac{1}{2}}) = 8x^{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}} y^{4-1} = 8x^{\frac{11}{4}} y^3 \\
 &= (8y^3) \sqrt[4]{x^{11}}
 \end{aligned}$$

Objetivo 10. Racionalizarás expresiones algebraicas con radicales en el denominador.

Ejercicios resueltos:

Racionaliza las expresiones que se dan:

$$\begin{aligned}
 1.) \quad \frac{2a}{\sqrt[3]{4a^2}} &= \left(\frac{2a}{\sqrt[3]{2^2 a^2}}\right) \left(\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}}\right) = \left(\frac{2a}{\sqrt[3]{4a^2}}\right) \left(\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}}\right) \\
 &= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2^2 a^2} \sqrt[3]{2a}} = \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2^3 a^3}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{2a} = \sqrt[3]{2a}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad \sqrt[4]{\frac{5x^3y}{9z^2}} &= \frac{\sqrt[4]{5x^3y}}{\sqrt[4]{9z^2}} = \frac{\sqrt[4]{5x^3y}}{\sqrt[4]{3^2z^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt[4]{5x^3y}}{\sqrt[4]{3^2z^2}} \right) \left(\frac{\sqrt[4]{3^2z^2}}{\sqrt[4]{3^2z^2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{5x^3y} \sqrt[4]{3^2z^2}}{\sqrt[4]{3^2z^2} \sqrt[4]{3^2z^2}} = \frac{\sqrt[4]{5 \cdot 3^2 x^3 y z^2}}{\sqrt[4]{3^4 z^4}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{45x^3yz^2}}{3z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.) \quad \sqrt{3x^2y} \left(\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{8x^3y^5}} \right) &= \sqrt{3x^2y} \left(\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{2^3x^3y^5}} \right) = \sqrt{3x^2y} \left(\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{2^3x^3y^5}} \right) \left(\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{2xy}} \right) \\ &= \sqrt{3x^2y} \left(\frac{\sqrt{2xy} \sqrt{2xy}}{\sqrt{2^3x^3y^5} \sqrt{2xy}} \right) = \sqrt{3x^2y} \left(\frac{\sqrt{2^2x^2y^2}}{\sqrt{2^4x^4y^6}} \right) \\ &= \sqrt{3x^2y} \left(\frac{2xy}{2^2x^2y^3} \right) = \sqrt{3x^2y} \left(\frac{1}{2xy^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3x^2y}}{2xy^2} \end{aligned}$$

Objetivo 11. Simplificarás expresiones algebraicas aplicando las leyes de los exponentes y los radicales.

Ejercicios resueltos:

Simplifica las expresiones dadas:

$$\begin{aligned} 1.) \quad (-4)^2 x^{-2} y z^{-3} \\ (-4)^2 x^{-2} y z^{-3} &= \frac{16y}{x^2 z^3} \end{aligned}$$

$$2.) \quad (-3x^{-4}y^6z^{-4})(2x^3yz^3)$$

$$(-3x^{-4}y^6z^{-4})(2x^3yz^3) = -6x^{-1}y^7z^{-1} = \frac{-6y^7}{xz}$$

$$3.) \quad \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$$

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{3s \cdot s^2}{t^2 \cdot t^4} = \frac{3s^3}{t^6}$$

$$4.) \quad (x^4y)\left(\frac{3x^4y^{-3}z}{6x^8y^2z^4}\right)$$

$$\begin{aligned} (x^4y)\left(\frac{3x^4y^{-3}z}{6x^8y^2z^4}\right) &= (x^4y)\left(\frac{3x^4z}{6x^8y^2y^3z^4}\right) = \left(\frac{3x^4x^4yz}{6x^8y^2y^3z^4}\right) \\ &= \frac{3x^8yz}{6x^8y^5z^4} = \frac{1}{2y^4z^3} \end{aligned}$$

$$5.) \quad \sqrt[3]{\left(\frac{a^{1/2}b^{1/3}c^{-1/4}}{a^{-1/4}b^{-3/4}c^{2/3}}\right)^4}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\left(\frac{a^{1/2}b^{1/3}c^{-1/4}}{a^{-1/4}b^{-3/4}c^{2/3}}\right)^4} &= \sqrt[3]{\frac{a^2b^{4/3}c^{-1}}{a^{-1}b^{-3}c^{8/3}}} = \sqrt[3]{\frac{a \cdot a^2b^{4/3}b^3}{c \cdot c^{8/3}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{a^3b^3b^{4/3}}{c^{11/3}}} = \sqrt[3]{\frac{a^3b^3b^{4/3}}{c^3c^{2/3}}} = \frac{ab}{c} \sqrt[3]{\frac{b^{4/3}}{c^{2/3}}} \\ &= \frac{ab}{c} \left(\frac{b^{4/3}}{c^{2/3}}\right)^{1/3} = \frac{ab}{c} \left(\frac{b^{4/9}}{c^{2/9}}\right) = \frac{ab^9\sqrt[9]{b^4}}{c^9\sqrt[9]{c^2}} \\ &= \left(\frac{ab^9\sqrt[9]{b^4}}{c^9\sqrt[9]{c^2}}\right)\left(\frac{\sqrt[9]{c^7}}{\sqrt[9]{c^7}}\right) = \frac{ab^9\sqrt[9]{b^4}\sqrt[9]{c^7}}{c^9\sqrt[9]{c^2}\sqrt[9]{c^7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ab\sqrt[9]{b^4c^7}}{c\sqrt[9]{c^9}} = \frac{ab\sqrt[9]{b^4c^7}}{c \cdot c} \\
 &= \frac{ab\sqrt[9]{b^4c^7}}{c^2}
 \end{aligned}$$
